Goda Exempel

Högre utbildning
Vol. 5, Nr. 2, 2015, 107-119

Flervalsprov för effektiv styrning mot sammansatta kunskaper och bättre projektarbeten

Filip Lindskog* och Henrik Hult
Matematik, Kungliga Tekniska Högskolan

Projektintensiva kurser i tillämpad matematik med stort deltagarantal och krävande lärandemål ställer höga krav på en effektiv kursutformning. Lärarens tid bör främst ägnas åt att leda väl förberedda studenter till att utveckla sin förmåga att kombinera matematisk teori, kreativ problemlösning och ingenjörsfärdigheter. Organiserat kamratlärande som stödjer projektarbetet kan fungera väl men förutsätter att studenterna har grundläggande kunskaper och ser fördelar med ett aktivt deltagande i aktiviteterna. Det finns ett behov av effektiva läraktiviteter som stödjer inlärning av grundläggande tekniker och begrepp och förbereder studenterna för projektarbete, men endast tar begränsade lärarresurer i anspråk. I den här artikeln förespråkar vi att tidigt i kursen använda ett flervalsprov som stödjer inlärning och styr studenterna till lämpliga läraktiviteter. Baserat på litteraturen för utformning och validering av flervalsprov studerar vi effekterna av införandet av ett sådant prov i en kurs i tidsserieanalys.

Nyckelord: flervalsprov, kursutformning, projektarbete

INTRODUKTION

Komplexa frågeställningar inom vitt skilda teknikområden, naturvetenskaper, ekonomi, finans och försäkring analyseras framgångsrikt med matematik, och analysen har givit upphov till nya insikter, effektivare metoder och tekniska innovationer. Dessutom har matematiska studier av sådana frågeställningar inspirerat utvecklingen av ny teori och effektivare metoder inom matematiken. Tillämpad matematik kan beskrivas som utveckling och användning av matematik med syftet att nå ny kunskap och erbjuda lösningar på problem utanför matematiken. En utbildning i tillämpad matematik ska ge studenterna förmågan att bedöma, för ett givet problem, hur problemet bör formuleras och vilka matematiska begrepp och tekniker som passar för att analysera och lösa problemet, samt förmågan att lösa problemet fullt ut med datorbaserad numerik. De högre lärandemålen innefattar bland annat förmågan att tolka, kritiskt granska och bedöma bergänsningarna hos matematiska modeller, förmågan att självständigt söka och använda litteratur, samt förmågan att kommunicera analys och tekniska lösningar muntligt och skriftlig. Vi anser att de högre lärandemålen kräver omfattande projektarbeten både som läraktiviteter och examination.

Under de senaste åren har intresset för kurser i tillämpad matematik på avancerad nivå vid Kungliga Tekniska Högskolan (KTH) ökat markant. De flesta sådana kurser ges årligen för ca 60-100 studenter. Speciellt gäller detta kurser som innehåller omfattande datorbaserade projektuppgifter som sin huvudsakliga läraktivitet. Projekten är utformade för att studenterna ska utveckla förmågan att analysera och lösa komplexa problem i verklighetsnära tillämpningar genom att kombinera

* Författarkontakt: lindskog@kth.se

ISSN 2000-7558

matematisk teori och väsentliga ingenjörsfärdigheter. Projektarbetet inkluderar både skriftliga rapporter och muntliga presentationer. Som en viktig läraktivitet används organiserat kamratlärande där studenter diskuterar sina egna och varandras analyser och lösningar. Utformingen och utfallet av kamratlärandet är viktiga för att studenterna ska nå kursens högre lärandemål.

Det finns flera utmaningar för läraren. Det ökande intresset för kurserna leder till stora studentgrupper där förmågan att ta ansvar för och organisera sitt lärande varierar stort inom grupperna. Läraren har inte möjlighet att ha återkommande diskussioner med varje enskild student och lärarens tidsbegränsningar kan inte åtgärdas enkelt utan att tillföra mer lärarresurser. Följdaktligen är utformningen av läraktiviteterna och examinationen avgörande för att tillgodose de högre lärandemålen utan att slösa tid på elementära baskunskaper och färdigheter som studievana studenter enkelt tillgodogör sig på egen hand. Våra erfarenheter visar att utmaningarna kan hanteras framgångsrikt med en anpassad kursutformning.

De kurser vi studerar är på 7,5 hp och examineras genom projektarbeten (3 hp) och en skriftlig tentamen (4,5 hp) i sal. Projektarbetena utförs i grupper om högst fyra studenter. Projekten är utmanande och stödjer lärandet av de färdigheter, förmågor och den kunskap som utgör de högre lärandemålen. I kursen stöds studenterna i sina projektarbeten genom aktivt deltagande i två diskussionsseminarier och två presentationsseminarier. Diskussionsseminarierna är inte en del av examinationen men utgör en viktig kamratläraktivitet. Flera projektgrupper arbetar med samma projekt och har incitament och fördel av att aktivt delta och ta del av erfarenheterna från de övriga grupperna. Presentationsseminarierna är en del av examinationen. Varje gruppmedlem ska kunna redogöra för alla delar av gruppens arbete och måste vara förberedd att presentera gruppens resultat vid projektseminariet samt skriftligen i en välskriven rapport.

Den skriftliga tentamen testar de förmågor och kunskaper som studenterna ska ha inhämtat under projektarbetet och under kursen i stort. Detta innefattar matematisk teori, modellering, tolkning av statistisk analys, metodförståelse, approximationer i komplexa modeller, m.m. Utformningen av tentamen är sådan att den är relativt enkel att klara för studenter som deltagit aktivt och gjort bra ifrån sig i projektarbetet. Studenter som inte deltagit aktivt i projektarbetet brukar uppleva tentamen som svår. Till exempel kan grafiska illustrationer och sammanfattande numeriska resultat från situationer liknande de som behandlats i projektarbetet förekomma i den skriftliga tentamen, och en students förmåga att tolka dessa väl är starkt kopplad till kvaliteten på projektarbetet.

Effektiviteten i diskussionsseminarierna som läraktivitet och som katalysator för att etablera effektivt grupparbete förutsätter att deltagarna är väl förberedda. Studenterna måste uppleva att det finns ett värde i att lära av och ge detaljerad återkoppling till sina kurskamrater. Vi förespråkar användandet av ett väl utformat flervalsprov, *som varje student måste klara för att få delta i projektarbetet*, för att på ett effektivt sätt säkerställa att studenterna snabbt skaffar sig baskunskaper och färdigheter som förbereder dem för projektarbetet. Ett flervalsprov tar endast lite av lärarens tid i anspråk i form av rättning, men det måste utformas rätt och tjäna ett flertal syften. Frågorna vi försöker besvara är: Hur ska flervalsprovet utformas för att säkerställa att studenterna tidigt i kursen, enskilt eller i sina projektgrupper, engagerar sig i lämpliga läraktiviteter? Hur kan vi säkerställa att provet skiljer mellan studenter som är tillräckligt förberedda för projektarbete och de som inte är det? Kommer provet kunna stödja kamratlärande i grupper men inte uppmuntra till fusk i form av kopiering av en kurskamrats svar?

Baserat på litteraturen för utformning och validering av flervalsprov, och dess användning för att styra studenternas lärande, har vi i detalj undersökt effekterna av ett flervalsprov med ett flertal syften i en kurs i tidsserieanalys.

Artikeln är utformad enligt följande. Först beskrivs syftena med och utformningen av flervalsprovet. Därefter presenteras resultaten av flervalsprovet och en metod för validering av provets kvalitet. Slutligen redogörs för de slutsatser vi menar bör dras av vår studie.

ETT FLERVALSPROV MED ETT FLERTAL SYFTEN

Vi har undersökt användandet av ett flervalsprov som görs tillgängligt elektroniskt för studenterna ungefär en vecka innan svaren måste skickas in. Studenterna löser problemen individuellt eller i sina projektgrupper utan inblandning av läraren och svaren skickas individuellt via epost eller en elektronisk plattform för kursstöd. Om studenten underkänns på första försöket senast dagen innan slutdatumet så får studenten en ytterligare möjlighet att klara provet.

Flervalsprovet är en obligatorisk del av det obligatoriska projektarbetet (3 av 7,5 hp). Provet är en del av projektarbetets läraktiviteter men utgör även ett examinationsmoment genom att ett underkänt provresultat ger betyget underkänt på projektarbetet. Eftersom andelen korrekta svar för godkända flervalsprov inte påverkar bedömningen av projektarbetet, står användandet av flervalsprovet inte i konflikt med krav på rättssäker examination. Det är projektarbetet och inte flervalsprovet som måste examineras rättssäkert.

Flera syften

Det huvudsakliga syftet med provet är att tidigt i kursen få studenterna att få baskunskaper och färdigheter som är nödvändiga för att kunna klara av projektarbetet. Flervalsprovet är utformat för att testa både förmågor och kunskaper som endast kan erhållas genom aktivt arbete med kursmaterialet och så att utantillinlärning inte lönar sig. Samtidigt är nivån satt så att det räcker med baskunskaper för att klara provet. Samtliga studenter som uppfyller kursens förkunskapskrav och som spenderar en dags arbete för att lösa problemen ska klara provet. Eftersom de som inte klarar provet inte får möjlighet att delta i projektarbetet, och därmed går miste om värdefulla högskolepoäng, bör motivationen att klara provet vara hög.

En fördel med flervalsprovet är att det krävs liten insats av läraren under provperioden för att rätta och utvärdera provresultaten. Rättningen kan automatiseras.

Ett ytterligare syfte med provet är att det stödjer studenterna i att samarbeta och lära sig tillsammans med sina projektgruppsmedlemmar. Samarbete som en läraktivitet uppmuntras. Utvärderingen av studenternas individuella bidrag äger rum i samband med projektpresentationerna och vid tentamen för att säkerställa slutbetygets legitimitet.

Ett annat syfte med provet är att det ger läraren snabb och tillförlitlig återkoppling på vilka delar av kursen som upplevs som svåra, så att läraren kan lägga upp sin undervisning för att stärka studenternas förmåga inom specifika områden.

Ett syfte är också att skilja mellan de studenter som har tillräckliga kunskaper och färdigheter för att börja med projektarbetet och de som inte har det. Oförberedda studenter äventyrar kvaliteten på diskussionsseminarierna och projektarbetet i stort som läraktivitet.

Principer för god utformning av flervalsprov

Vi identifierar följande nödvändiga villkor (se [4, sid 67]) för konstruktion av lämpliga flervalsprov:

- Provet måste ha ett tydligt syfte och innehåll.
- Testposterna måste vara konsistenta med syftet och innehållet.
- Det måste finnas en genomtänkt metod för att bedöma om utformningen av en testpost svarar mot det avsedda syftet.

Testposterna är konstruerade på nivån kunskap och förståelse i Blooms taxonomi [1] och följer etablerade riktlinjer för testposter, se [2, 4]. Vi använder statistiska metoder för att utvärdera kvaliteten och egenskaperna hos testposter i relation till svarsfördelningen. Sådana metoder beskrivs i detalj i [4, Kapitel 8] och [3].

Beskrivning av testposter

Flervalsprovet som undersöks i den här artikeln består av tio poster där varje post har fyra alternativ A-D och ges i en kurs i tidsserieanalys på avancerad nivå. Minst sex korrekta svar är kriteriet för att klara provet. Provet i sin helhet finns som bilaga till denna text.

Problem 1 prövar förmågan att tolka realistiska data i form av en tidsseriemodell, utan krav på beräkningar eller simuleringar. Problem 2 prövar grundläggande förståelse av begreppen kausalitet och inverterbarhet. Problem 3,4, 5 och 9 prövar förmågan att identifiera modeller från olika typer av grafiska representationer av tidsseriedata. Dessa testposter är utformade så att studenterna måste implementera lämpliga simuleringsprocedurer och lära sig tolka simuleringsresultaten för att lösa problemen. Problem 6 och 7 prövar högre lärandemål i form av förmågan att kombinera två begrepp. I Problem 6 måste studenterna tolka grafiska illustrationer av skattningar tillämpade på tidsseriedata och kombinera tolkningen av graferna med lämpliga beräkningar. I Problem 7 måste studenterna tolka statistiska skattningar, identifiera relationen mellan skattningen och modellparametrar samt genomföra numeriska beräkningar för modellidentifiering. De vilseledande alternativen i Problem 6 och 7 är valda så att förståelse av ett av begreppen eliminerar två svarsalternativ och valet reduceras till två alternativ som kräver högre kunskaper för att identifiera korrekt svarsalternativ. Problem 9 och 10 prövar förmågan att dra slutsatser baserat på medelsvåra beräkningar.

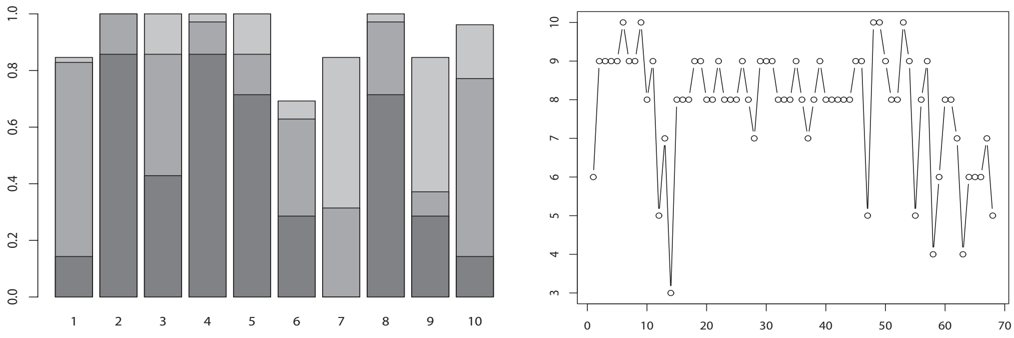
Vi bedömer att kombinationen och utformningen av testposterna överensstämmer väl med provets syfte.

VALIDERING OCH RESULTAT

Provet togs av 68 studenter. Medianresultatet var 8 av 10 korrekta svar. De studenter som misslyckades med första försöket, senast dagen innan slutdatumet, gavs en andra chans att klara provet. Fyra studenter gjorde det och klarade provet på andra försöket. Tre studenter blev underkända. I högra delen av Figur 1 ser vi att samarbete i studentgrupper förekom (2-4 på varandra följande identiska provresultat) som förväntat. Vidare noterar vi att de som blev underkända var de som skickade in sina svar kort innan sluttiden. Svarsfrekvenserna för varje testpost redovisas i Tabell 1.

Tabell 1. Svarsfrekvens för varje testpost. Den feta fonten indikerar det korrekta alternativet.

Problem	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	21%	**98%**	6%	**97%**	1%	35%	41%	0%	9%	16%
B	0%	1%	**87%**	0%	7%	3%	**49%**	0%	35%	6%
C	3%	1%	7%	3%	1%	**62%**	3%	**96%**	1%	0%
D	**76%**	0%	0%	0%	**91%**	0%	7%	4%	**55%**	**78%**



Figur 1. Vänster: Frekvens korrekta svar per testpost för de tre grupperna av studenter med poängsumma 0-5, 6-8, respektive 9-10. Höger: Poängsumma per prov i den ordning de skickades in.

Jämförelse av delpopulationer

För att utvärdera testposternas förmåga att särskilja mellan studenter delas populationen upp i tre delpopulationer, kallade Grupp 1, Grupp 2 och Grupp 3, som består av de studenter som hade 90-100%, 60-80%, respektive 0-50% korrekta svar. Andelen korrekta svar för var och en av de tre delpopulationerna illustreras i den vänstra bilden i Figur 1.

I Problem 1 är det stor skillnad på resultaten för Grupp 2 och Grupp 3, vilket indikerar att denna post särskiljer mellan studenter med och utan tillräcklig kunskapsnivå. En liknande slutsats kan dras från resultaten för Problem 10.

Problem 3, 4, 5 och 8 är utformade så att studenterna måste använda dator och implementera sina egna simuleringsrutiner för att lösa problemen. Nästan alla studenter i Grupp 1 och 2 klarade dessa problem genom att engagera sig i de avsedda läraktiviteterna. Även om den korrekta svarsfrekvensen är exceptionellt hög så anser vi att dessa problem haft önskat syfte. I Problem 3 ges fyra tidsseriemodeller och uppgiften är att, för var och en av modellerna, bestämma vilken av de fyra simulerade vägarna i en given figur som hör till vilken modell. Skillnaden i utseende mellan de simulerade vägarna kommer från att de fyra modellerna ger olika seriell korrelation. Även om det är möjligt att bestämma skillnaderna enbart genom beräkningar så är det mycket lättare att lösa problemet genom att kombinera beräkningar med egna simuleringar. De flesta studenterna hade simulerat från modellerna för att verifiera sina antaganden om hur modellerna skiljer sig åt. Slutsatsen vi drar är att studenterna genomförda den avsedda läraktiviteten när de löste problemet.

Problem 6 och 7 prövar det högre lärandemålet att kombinera två begrepp. Från svarsfrekvenserna drar vi slutsatsen att de flesta studenter är bekanta med begreppen då de lyckas identifiera altarnativen A och D, men studenter i Grupp 3 misslyckades med att kombinera begreppen och identifiera det korrekta alternativet. I Problem 7 visar studenterna att de har kunskap om begreppen då de i stor utsträckning lyckas identifiera A och B som de korrekta alternativen, men studenterna i Grupp 2 och 3 lyckas inte genomföra de mer avancerade beräkningarna som krävs för att identifiera korrekt alternativ. Vi ser från svarsfrekvenserna att Problem 6 är svårare och särskiljer mellan studenterna i Grupp 1 och 2. Problem 7 särskiljer mellan studenterna i samtliga grupper.

Bristfälliga svarsalternativ

Den observerade svarsfrekvensen i Tabell 1 kan även användas till att identifiera felställda testposter och bristfälliga svarsalternativ. Om ett svarsalternativ är så långsökt att ingen väljer det så är det en indikation på att den testposten bör ses över. I de fall testposter prövar elementära kunskaper som endast ett fåtal studenter saknar kan man dock förvänta sig att det förekommer lämpliga svaralternativ som ändå inte blir valda. I det undersökta provet finns det testposter som prövar förmågan att kombinera två begrepp. I sådana fall kan en grundläggande förståelse vara tillräcklig för att eliminera två svarsalternativ, men högre kunskapsnivå krävs för att identifiera det korrekta alternativet. I sådana fall kan det också finnas välformulerade svarsalternativ som inte blir valda. I Problem 8 är det mycket svårt att gissa det korrekta alternativet utan att genomföra en lämplig simuleringsstudie. Eftersom ingen valde alternativ A eller B drar vi slutsatsen att studenterna genomförde den avsedda simuleringsstudien och därför finns det ingen anledning att revidera alternativen A och B. I Problem 2, 3 och 4 finns det också svarsalternativ som ingen valde. I dessa problem är svarsalternativen valda för att ha en komplett uppsättning alternativ och vi ser ingen anledning att revidera dessa. Dessa testposter är förhållandevis enkla och det är huvudorsaken till att vissa svarsalternativ inte blev valda. I Problem 1 och 10 finns det svarsalternativ som inte blev valda och i dessa fall bedömer vi att studenterna ansåg dem vara alltför långsökta. Dessa svarsalternativ bör revideras.

SLUTSATSER

Huvudsyftet med det obligatoriska flervalsprovet som vi föreslagit är att säkerställa att studenterna tidigt i kursen har nödvändiga baskunskaper för att vara väl förberedda för projektarbetet, den viktigaste läraktiviteten i kursen. Ytterligare syften med provet är att förmå studenterna att engagera sig i relevanta läraktiviteter och att säkerställa kvaliteten på de aktiviteter där studenterna lär av att förklara, ifrågasätta och ge detaljerad återkoppling till varandra. Provet ger dessutom läraren tidig och tillförlitlig information om vad studenterna lärt sig och till vilka områden läraren ska styra sina resurser för att studenterna ska nå de högre lärandemålen.

Provet är utformat så att aktivt arbete i form av simuleringsstudier och andra datorbaserade aktiviteter, läsning och reflekterande över kurslitteraturen samt övning i problemlösning krävs för att klara provet.

Provresultaten visar att förutsättningarna för provet och utformningen av testposterna leder till att studenterna aktiverar sig i de avsedda läraktiviteterna och därmed i stor utsträckning klarar provet. Den statistiska analysen av provresultaten och inlämningssekvensen gjorde det möjligt att dra slutsatsen att provet lyckas särskilja de studenter som är väl förberedda för projektarbetet från de som inte är det. Genom valideringsmetoden identifieras de testposter som bör förbättras.

Anledningen till att det fåtal (ca 4%) underkända studenter underkändes är troligen en kombination av avsaknad av grundläggande kunskaper och färdigheter i matematik, tidigare studieresultat pekar på detta, och bristande ambition att avsätta tid för de läraktiviteter som flervalsprovet kräver. Trots att ett fåtal studenter tidigt i kursen diskvalificeras från att delta i projektarbete, och därmed från att få ett godkänt kursbetyg, anser vi att fördelarna med upplägget med råge uppväger eventuella nackdelar.

Baserat på resultaten i den studerade kursen i tidsserieanalys planerar vi att anamma en liknande kursutformning, med flervalsprovet som en väsentlig aktivitet, i ett flertal projektintensiva kurser i tillämpad matematik på avancerad nivå.

REFERENSER

[1] Bloom, B. S. (Ed.) *Taxonomy of Educational Objectives: Handbook I: Cognitive Domain*. Longmans, Green and Company, 1956.

[2] Burton, S. J., Sudweeks, R. R., Merrill, P. F., and Wood, B. How to prepare better multiple-choice test items: guidelines for University faculty. Brigham Young University Testing Services and the Department of Instructional Science. 1991.

[3] Lister, R. F. 'Methods for evaluating the appropriateness and effectiveness of summative assessment via multiple choice examinations for technology-focused disciplines', Evaluations and Assessment Conference, Sydney, Aust, November 2005 in *Making a Difference: 2005 Evaluations and Assessment Conference*, ed Kandlbinder,P;, UTS, Sydney, Aust, pp. 75-84.

[4] Osterlind, S. J. *Constructing test items*, second edition, Springer, 1998. Springer series: Evaluation in education and human services, vol. 47.

APPENDIX

MULTIPLE CHOICE TEST IN TIME SERIES ANALYSIS 2014

Problem 1. Consider the model below for measurements X_t of the outdoor air temperature at KTH at 13:00 each day of February, March, and April. Let $t = 1$ correspond to the first day of February and let $t = T$ correspond to the last day of April.

$$X_t = a + bt + Y_t, \quad Y_t = cY_{t-1} + Z_t, \quad \{Z_t\} \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2), \quad t = 1, \dots, T.$$

Which statement is most plausible?

A $b > 0$, $c = 1$
B $b > 0$, $c = 0$
C $b = 0$, $c = 0.5$
D $b > 0$, $c = 0.5$

Problem 2. The time series $\{X_t\}$ is given by

$$X_t - 0.88X_{t-1} + 0.5X_{t-2} = Z_t + 0.8Z_{t-1} + 0.8Z_{t-2}, \quad \text{where } \{Z_t\} \text{ is } \mathrm{WN}(0, \sigma^2).$$

Which statement is correct?

A causal and invertible
B causal but not invertible
C invertible but not causal
D neither causal nor invertible

Consider the following four time series models, where $\{Z_t\}$ is an iid sequence of standard normal random variables:

(1) $$X_t = 0.8X_{t-1} + Z_t + 0.9Z_{t-1},$$
(2) $$X_t = -0.8X_{t-1} - 0.9X_{t-2} + Z_t,$$
(3) $$X_t = -0.8X_{t-1} + Z_t,$$
(4) $$X_t = 0.8X_{t-1} + Z_t,$$

Problem 3. In Figure 1 you see simulated trajectories for the time series models (1)-(4). Which combination is correct?

A (1)-(c), (2)-(a), (3)-(b), (4)-(d)
B (1)-(d), (2)-(a), (3)-(b), (4)-(c)
C (1)-(c), (2)-(b), (3)-(a), (4)-(d)
D (1)-(b), (2)-(c), (3)-(d), (4)-(a)

Problem 4. In Figure 2 you see sample autocorrelations based on the simulated trajectories for the time series models (1)-(4). Which combination is correct?

A (1)-(g), (2)-(f), (3)-(h), (4)-(e)
B (1)-(g), (2)-(h), (3)-(f), (4)-(e)
C (1)-(e), (2)-(h), (3)-(f), (4)-(g)
D (1)-(g), (2)-(f), (3)-(e), (4)-(h)

Problem 5. In Figure 3 you see sample partial autocorrelations based on the simulated trajectories for the time series models (1)-(4). Which combination is correct?

A (1)-(i), (2)-(l), (3)-(k), (4)-(j)
B (1)-(i), (2)-(k), (3)-(j), (4)-(l)
C (1)-(k), (2)-(i), (3)-(l), (4)-(j)
D (1)-(i), (2)-(k), (3)-(l), (4)-(j)

Problem 6. In Figure 4 you see sample autocorrelations and partial autocorrelations based on a sample of size 500 from an AR(p) process. Which statement is correct?

A $p = 2$, $(\phi_1, \phi_2) \approx (0.47, -0.22)$
B $p = 1$, $\phi_1 \approx 0.47$
C $p = 2$, $(\phi_1, \phi_2) \approx (0.57, -0.22)$
D $p = 1$, $\phi_1 \approx 0.57$

Problem 7. The sample autocovariances $\widehat{\gamma}(0), \dots, \widehat{\gamma}(7)$, with numerical values

```
2.08476  1.36023  0.51561 -0.03840  0.03373  0.09417  0.09253  0.03508
```

are based on a sample of size 500 from an MA(q) process $X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_q Z_{t-q}$, where the Z_ts are independent and $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$. Which statement is correct?

A $q = 2$, $\sigma \approx 1.44$
B $q = 2$, $\sigma \approx 1.01$
C $q = 3$, $\sigma \approx 1.26$
D $q = 3$, $\sigma \approx 1.04$

Problem 8. In Figure 5 sample autocorrelations based on an iid sample of size n from the standard normal distribution are shown. Which statement is most plausible?

A $n \geq 3000$
B $1800 \leq n \leq 2000$
C $300 \leq n \leq 500$
D $n \leq 100$

Problem 9. Consider the AR(1) process $X_t = 0.8X_{t-1} + Z_t$, where $\{Z_t\}$ is WN(0, 4). Let $P_{10}X_{11}$ be the best linear predictor of X_{11} based on $X_1, \dots, X_{10}$ (minimizing the mean squared prediction error). Let

$$c = \frac{E[(X_{11} - P_{10}X_{11})^2]}{E[(X_{11} - E[X_{11}])^2]}$$

Which statement is correct?

A $c = 0.40$
B $c = 1.00$
C $c = 0.45$
D $c = 0.36$

Problem 10. Consider the AR process $X_t = -0.5X_{t-1} + 0.4X_{t-3} + Z_t$, where $\{Z_t\}$ is WN(0, 4). Let $\alpha(h)$ denote the PACF at lag h of the AR process. Which statement is correct?

A $(\alpha(1), \alpha(2), \alpha(3), \alpha(4)) \approx (-0.50, 0, 0.40, 0)$
B $(\alpha(1), \alpha(2), \alpha(3), \alpha(4)) \approx (-0.83, 0.40, 0, 0)$
C $(\alpha(1), \alpha(2), \alpha(3), \alpha(4)) \approx (0.48, -0.24, -0.40, 0)$
D $(\alpha(1), \alpha(2), \alpha(3), \alpha(4)) \approx (-0.48, -0.24, 0.40, 0)$

(a) (b)

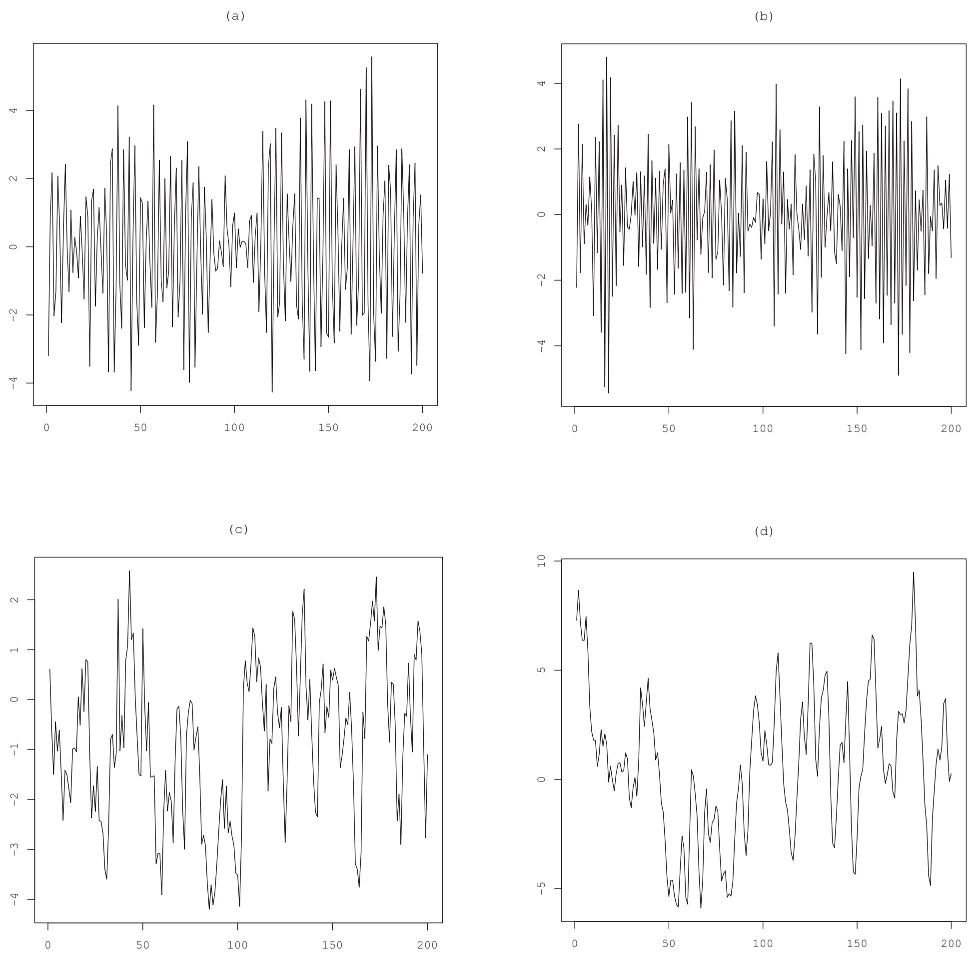


Figure 1. Simulated trajectories from the four time series models

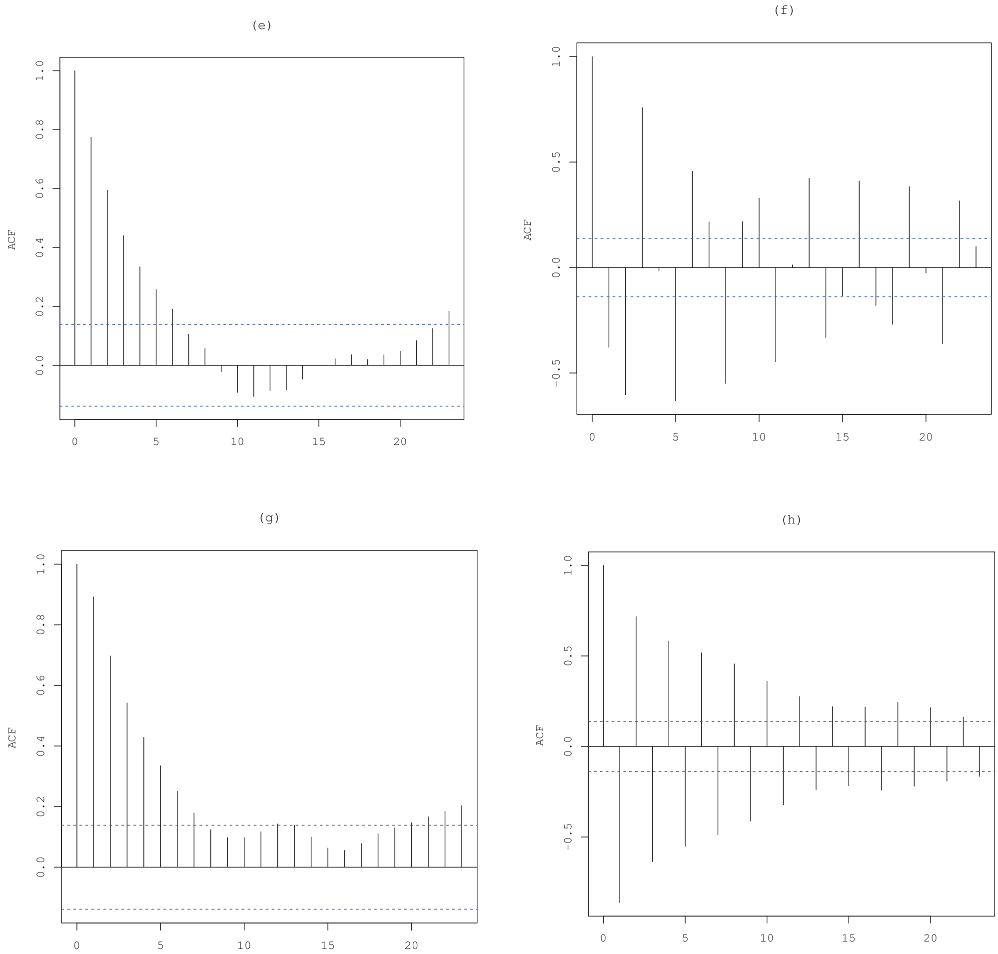


Figure 2. Sample ACF:s based on the simulated trajectories from the four time series models

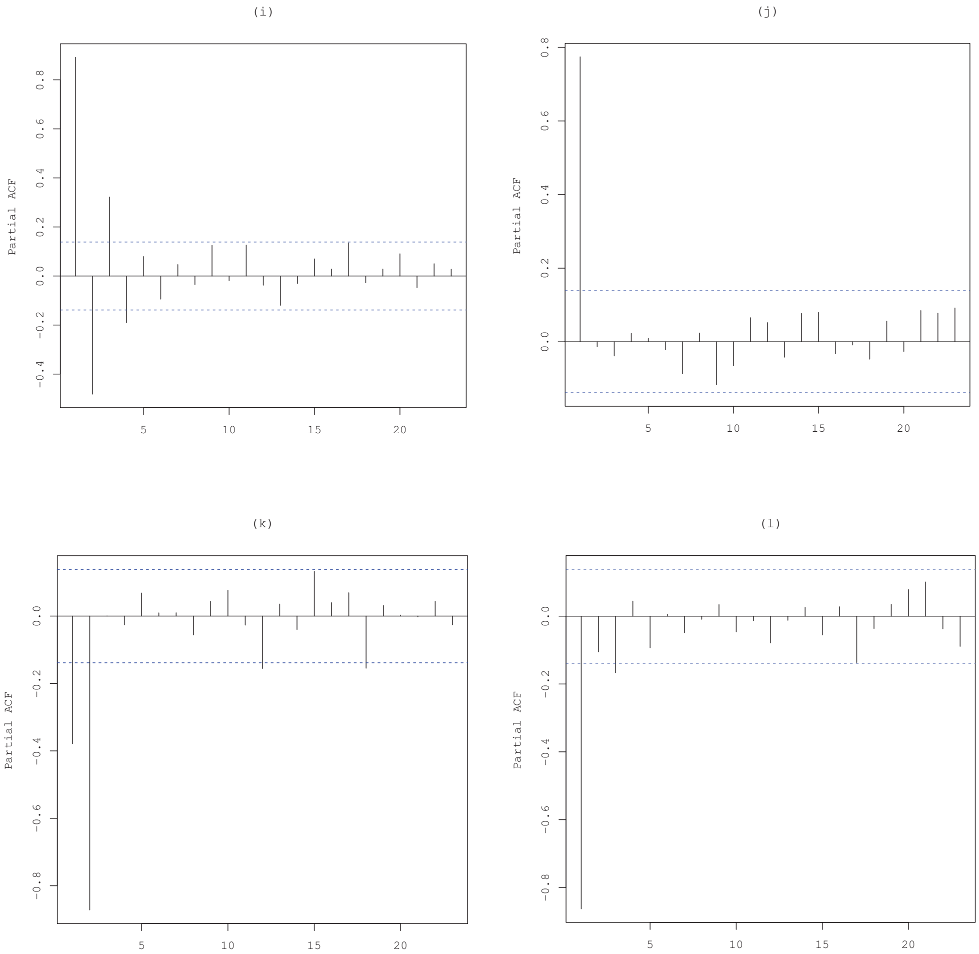


Figure 3. Sample PACF:s based on the simulated trajectories from the four time series models

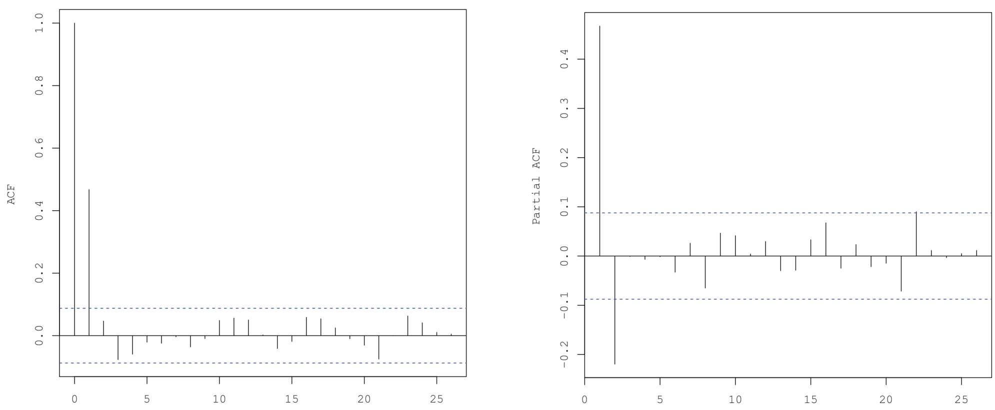


Figure 4. Sample autocorrelations and sample partial autocorrelations based on a sample of size 500 from an AR(p) model

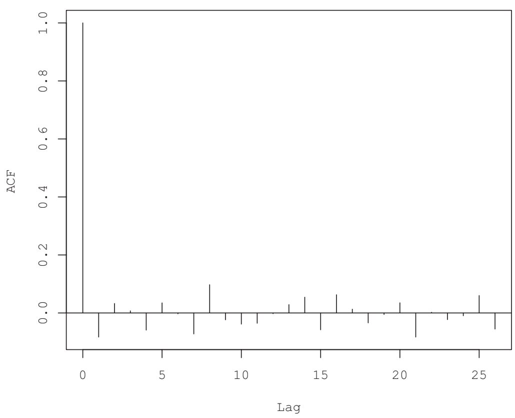


Figure 5. Sample autocorrelations based on an iid sample of size n from the standard normal distribution